

Eletrônica Analógica

Eletrostática



Diretor Executivo

DAVID LIRA STEPHEN BARROS

Gerente Editorial

CRISTIANE SILVEIRA CESAR DE OLIVEIRA

Projeto Gráfico

TIAGO DA ROCHA

Autoria

LUÍZ GUILHERME REZENDE RODRIGUES



AUTORIA

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

Olá! Sou formado em Física e tenho experiência profissional de mais de 10 anos nas áreas de Física de Campos, Cosmologia e Gravitação e Eletromagnetismo. Passei por diferentes empresas, universidades e faculdades de todo o país. Sou apaixonado pelo que faço e adoro transmitir minha experiência de vida àqueles que estão iniciando em suas profissões, por isso fui convidado pela Editora Telesapiens a integrar seu elenco de autores independentes. Estou muito feliz em poder ajudar você nesta fase de muito estudo e trabalho. Conte comigo!

ICONOGRAFICOS

Olá. Esses ícones irão aparecer em sua trilha de aprendizagem toda vez que:



OBJETIVO:
para o início do desenvolvimento de uma nova competência;



NOTA:
quando forem necessários observações ou complementações para o seu conhecimento;



EXPLICANDO MELHOR:
algo precisa ser melhor explicado ou detalhado;



SAIBA MAIS:
textos, referências bibliográficas e links para aprofundamento do seu conhecimento;



ACESSE:
se for preciso acessar um ou mais sites para fazer download, assistir vídeos, ler textos, ouvir podcast;



ATIVIDADES:
quando alguma atividade de autoaprendizagem for aplicada;



DEFINIÇÃO:
houver necessidade de se apresentar um novo conceito;



IMPORTANTE:
as observações escritas tiveram que ser priorizadas para você;



VOCÊ SABIA?
curiosidades e indagações lúdicas sobre o tema em estudo, se forem necessárias;



REFLITA:
se houver a necessidade de chamar a atenção sobre algo a ser refletido ou discutido sobre;



RESUMINDO:
quando for preciso se fazer um resumo acumulativo das últimas abordagens;



TESTANDO:
quando o desenvolvimento de uma competência for concluído e questões forem explicadas;

SUMÁRIO

Teoria Eletrostática	10
Tópicos de Álgebra Vetorial.....	10
Vetores no Plano Cartesiano	12
Algumas Propriedades Vetoriais.....	15
Os Produtos entre Vetores	16
Campos Elétricos que não Variam no Tempo.....	18
Definição de Corpos Puntiformes e Corpos Extensos.....	19
A Natureza das Forças	20
Introdução às Cargas Elétricas.....	20
Lei de Gauss e suas Aplicações	24
A Lei de Coulomb para a Força Elétrica.....	24
Campo Elétrico Devido à Distribuição Contínua de Cargas	27
O Fluxo Elétrico	30
A Lei de Gauss para a Eletrostática	32
Potencial Elétrico Campo Elétrico	36
O Potencial.....	36
As Equações Diferenciais para o Potencial.....	40
A Equação de Poisson.....	40
Equação de Laplace	42
Soluções das Equações de Poisson e Laplace	42
O Dipolo Elétrico e as Linhas de Fluxo	45
Energia e os Campos Eletrostáticos	48
Trabalho de uma Força Elétrica.....	48
Energia	49

UNIDADE

01

INTRODUÇÃO

Você sabia que a Teoria Eletromagnética é uma das mais importantes teorias existentes no nosso mundo? Sua extrema importância está no fato de que, na natureza, grande parte dos fenômenos ocorridos podem ser explicados por essa belíssima teoria. A Teoria Eletromagnética descreve o movimento das ondas eletromagnéticas, que apresentam uma grande aplicabilidade em nossas vidas e no desenvolvimento da sociedade moderna. Todas as tecnologias denominadas de ponta na atualidade se baseiam no eletromagnetismo e sobretudo a propagação das ondas eletromagnéticas. Tudo isso faz com que novos equipamentos, novas tecnologias e novas teorias sejam criadas e aperfeiçoadas. É claro que tudo isso inclui o nosso tema principal do presente livro: a Eletrônica Analógica. Essa é mais uma das inúmeras tecnologias criadas pela ciência que têm como base a Teoria Eletromagnética. Por meio da eletrônica analógica estamos conseguindo criar, cada vez mais, circuitos extremamente pequenos e ao mesmo tempo altamente tecnológicos. Além disso, podemos otimizar vários sistemas com alta aplicabilidade em nosso dia a dia, incluindo o aumento da qualidade e da perspectiva de vida. Afinal, a ciência sempre acompanha o desenvolvimento social e isso é que nos define como sociedade.

OBJETIVOS

Olá. Seja muito bem-vindo à Unidade 1 – Eletrostática. Nosso objetivo é auxiliar você no desenvolvimento das seguintes competências profissionais até o término desta etapa de estudos:

1. Definir os conceitos básicos da Teoria da Eletrostática.
2. Entender e aplicar, na prática, a Lei de Gauss para a determinação de campos elétricos.
3. Definir a grandeza potencial elétrica e encontrar sua relação com o campo elétrico.
4. Avaliar como a densidade de energia elétrica relaciona-se com o campo elétrico.

Teoria Eletrostática



OBJETIVO:

Ao término deste capítulo, você será capaz de entender como funcionam os conceitos e objetos matemáticos envolvidos na teoria da Eletrostática. Faremos essa discussão para que possamos construir juntos a teoria da eletrônica analógica. Com todas as ferramentas e todos os conceitos discutidos e bem entendidos, tornaremos o processo de aprendizado cada vez menos complicado e mais fundamentado. Está motivado para desenvolver esta competência? Então, vamos lá. Avante!

Tópicos de Álgebra Vetorial

Imagine que você é um estudante estrangeiro que veio estudar no Brasil por ser extremamente apaixonado pela cidade do Rio de Janeiro. Por ter desenvolvido uma grande paixão por essa cidade, certamente você já viu ou ouviu falar da estátua do Cristo Redentor. Agora imagine uma conversa entre você e um professor do departamento de Física da instituição de ensino onde você estuda. Nessa conversa, você demonstra sua grande admiração pela cidade do Rio de Janeiro e pergunta ao professor qual a altura dessa estátua. Como um bom conhecedor do país, o professor responde que a altura é de aproximadamente 38 metros (m).

Agora imagine que você entra numa sala aula e, depois de um tempo, você sente a necessidade de ir ao banheiro, então você pergunta para um colega onde fica o banheiro mais próximo. O colega te responde que o banheiro se localiza a 20 metros (m) da sala de aula e que você deve andar 15 metros (m) em direção norte até a esquina, depois 5 metros (m) em direção leste.

Repare que nas duas situações você recebeu informações em metros, ou seja, foi utilizada uma unidade de medida de distância. Na primeira situação, a informação da altura da estátua foi suficiente e completa para o seu entendimento. Já na segunda, se seu colega

respondesse apenas 20 metros (m) você poderia ficar perdido no departamento devido à ausência de informações adicionais. Em outras palavras, a informação inicial está incompleta.

Essas duas situações podem servir como exemplo para afirmar que em Física e, portanto, na natureza, existem diferentes tipos de informações, mesmo que elas apresentem algumas semelhanças, como a unidade de medida de distância mencionada anteriormente. Em uma linguagem mais específica e técnica, isso quer dizer que as informações são representadas por meio de diferentes grandezas.

As grandezas não são apenas números: no fundo elas são ferramentas que foram desenvolvidas pelos cientistas para estudar a natureza e a Física, é claro, é a ciência que busca estudar e descrever os fenômenos naturais. Grandezas físicas são todas as quantidades que podem, de determinada forma, serem medidas. No nosso nível de construção do conhecimento, destacaremos dois tipos de grandezas físicas: grandezas escalares e grandezas vetoriais.

I) As grandezas físicas escalares são aquelas formadas por um valor numérico, que será denominado escalar, e sua correspondente unidade de medida.

EXEMPLO:

Vamos utilizar como exemplo de grandezas físicas escalares os seguintes casos:

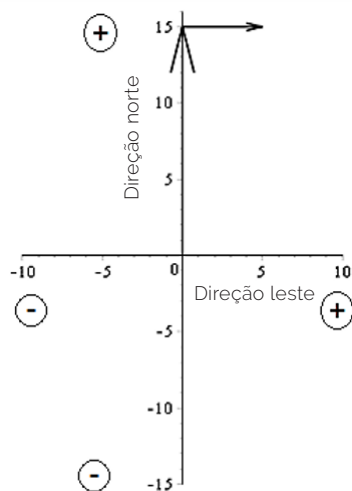
- A altura de 1,80 m, sendo 1,80 o valor numérico (ou escalar) e o metro a correspondente unidade de medida.
- A massa de 80 kg, sendo 80 o valor numérico (ou escalar) e o quilo a correspondente unidade de medida.
- O tempo de uma viagem de 2h, sendo o valor numérico (ou escalar) e a hora a correspondente unidade de medida.

II) As grandezas físicas vetoriais são aquelas representadas por vetores, ou seja, grandezas formadas por um valor numérico (ou escalar), uma direção, um sentido e a correspondente unidade de medida.

EXEMPLO:

Vamos utilizar como exemplo de grandezas física vetoriais o caso da caminhada até o banheiro, citado anteriormente: você deve andar 15 m ao norte e 5 m ao leste. Nesse caso, 15 e 5 são os valores numéricos, a caminhada vertical e horizontal é a direção e o norte e leste são os sentidos da caminhada. O metro é a correspondente unidade de medida. Essas informações estão representadas graficamente na Figura 1.

Figura 1 – Caminhada até o banheiro vista de cima



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Diante de todas as informações apresentadas e discutidas, damos início ao estudo dos vetores no contexto da Física. A seguir, introduziremos essa poderosa ferramenta para a descrição dos fenômenos naturais relacionados ao eletromagnetismo.

Vetores no Plano Cartesiano

Como destacado na seção anterior, os vetores assumem um papel fundamental no contexto da Física e, portanto, na descrição dos fenômenos naturais, já que eles são componentes indispensáveis da caracterização das grandezas vetoriais. É importante destacar que essas informações se estendem também ao contexto de várias outras áreas,

como as Engenharias e todas as áreas envolvidas com Ciências Naturais. Já adiantamos que ao longo deste material iremos definir e estudar, por meio de escalares e vetores, grande parte das grandezas presentes no eletromagnetismo.

Na Figura, 1 foi mostrada uma representação gráfica da sua caminhada da sala de aula até o banheiro. É importante reparar que as setas orientadas indicam a representação gráfica de vetores.



DEFINIÇÃO:

Matematicamente, vetores são segmentos de retas orientados, por isso são representados por flechas. Em outras palavras, as flechas indicam a direção e o sentido de um vetor. Ao longo deste material, uma quantidade vetorial será representada por uma seta ou pelo destaque em negrito. Em resumo, representaremos um vetor B das seguintes formas: $\vec{B}$ ou $\mathbf{B}$.

Por serem quantidades matemáticas, os vetores apresentam algumas características e propriedades. Entre as características destacamos o módulo (valor numérico), a direção e o sentido do vetor - repare que essas propriedades foram representadas na Figura 1 e discutidas no exemplo de grandezas vetoriais. Já no caso das propriedades, destacamos a multiplicação por um número qualquer, a soma entre dois vetores, o produto escalar entre dois vetores, o produto vetorial entre dois vetores e o versor de um vetor.

Para prosseguir, imagine que você está parado em uma rodoviária e vê um ônibus se aproximar. Diante dessa situação, a seguinte questão é levantada: os passageiros deste ônibus se encontram em repouso ou em movimento? A resposta para essa indagação pode parecer muito simples, porém ela exige muita atenção. Na verdade, não podemos responder essa pergunta de forma objetiva, pois a resposta depende de quem está observando o passageiro. Se o observador for você, que se encontra parado do lado de fora do ônibus, a resposta será a de que o passageiro está em movimento. Por outro lado, se o observador for o motorista

do ônibus, a resposta será a de que que o passageiro se encontra em repouso.

Essa situação (e muitas outras semelhantes) evidencia o fato de que a Física é uma ciência que depende sempre de um referencial. Nesse exemplo, especificamente você e o motorista são os dois referenciais. Concluimos então que é extremamente importante, antes de discutir qualquer problema físico ou situação, não só definir um referencial como também atribuir um sentido a ele.

Retomando o caso da caminhada até o banheiro, podemos adotar como referência o eixo cartesiano bidimensional que é composto pelo eixo y (eixo vertical ou eixo das ordenadas) e pelo eixo x (eixo horizontal ou das abscissas). Como sentido, pode-se adotar, no eixo y, o sentido norte como positivo e no eixo x, o sentido leste. Essas informações foram mostradas no esquema gráfico na Figura 1.

Um outro fator importante a ser mencionado é que tanto o referencial quanto o sentido do movimento são definidos por você, ou seja, você escolhe qual a maneira de trabalhar um determinado problema – o que pode simplificá-lo ou torná-lo mais complexo. Geralmente o sistema cartesiano é um dos mais usados e também será bastante utilizado a partir de agora ao longo deste material.

O eixo cartesiano tridimensional apresenta uma origem (na qual as coordenadas são nulas) e é composto por três dimensões: eixo x, eixo y e eixo z. Isso quer dizer que uma grandeza física de origem vetorial apresentará três informações que irão compor a sua posição em relação à origem:

- I) A primeira informação está relacionada ao eixo
- II) A segunda informação está relacionada ao eixo
- III) A terceira informação está relacionada ao eixo

EXEMPLO:

Vamos considerar os vetores bidimensionais representados pela Figura 1. Repare que cada um dos dois vetores apresenta duas informações sobre sua posição no eixo cartesiano. Em outras palavras,

há uma informação em relação ao eixo x e a outra em relação ao eixo y. De maneira matemática, os vetores bidimensionais são representados de forma genérica como $A(x,y)$ e vetores tridimensionais na forma $B(x,y,z)$.

Considerando os vetores da Figura 1, o vetor A será matematicamente representado por:

$$\mathbf{A} = 0\mathbf{i} + 15\mathbf{j}, \quad (1)$$

Isso quer dizer que você não se deslocou no eixo x ($x=0$) e deslocou 15 m ($y=15$) no eixo y.

O vetor B é representado matematicamente por:

$$\mathbf{B} = 15\mathbf{i} + 5\mathbf{j}. \quad (2)$$

Os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ serão discutidos mais adiante.



ACESSE:

Caso julgue necessário, assista ao vídeo Grandezas físicas (escalares e vetoriais) para uma melhor assimilação do conteúdo. [Acesse clicando aqui.](#)

Com base nas informações apresentadas até aqui, concluímos que os vetores são de extrema importância no contexto da descrição dos fenômenos da natureza. Em outras palavras, é por meio deles que conseguimos construir teorias relacionadas às grandezas vetoriais presentes nas ciências exatas.

Algumas Propriedades Vetoriais

Como mencionado anteriormente, vamos apresentar e discutir algumas das propriedades mais importantes relacionadas aos vetores. Para que essas propriedades sejam definidas, vamos considerar como grandezas escalares as quantidades e e como grandezas vetoriais as quantidades tridimensionais $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$.

1) Propriedade de associação no produto:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}. \quad (3)$$

II) Propriedade de distribuição:

$$a.(v + w) = a.v + a.w. \quad (4)$$

III) Propriedade de comutação:

$$v + w = w + v. \quad (5)$$

IV) Propriedade de associação:

$$v + (w + u) = (v + w) + u. \quad (6)$$

V) O elemento oposto:

$$u + (-u) = 0. \quad (7)$$



SAIBA MAIS:

As demonstrações detalhadas dessas propriedades podem ser encontradas em Nussenzveig (1997) e Griffiths (2009).

Os Produtos entre Vetores

Para entender como funciona o produto entre dois vetores, iremos considerar os vetores tridimensionais i , j e k , que formam os vetores base do sistema cartesiano e apresentam módulo unitário, por isso definem um conjunto de bases ortonormais (também conhecidas como BOM). O Vetor unitário é também denominado versor de um vetor. O versor de um vetor qualquer A será representado por $\hat{A}$ e é definido por:

$$\hat{A} = \frac{A}{\|A\|}. \quad (8)$$

No eixo cartesiano tridimensional os vetores unitários relacionados às direções x , y e z são, respectivamente, $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ e $k = (0,0,1)$.

O produto entre dois vetores é definido de duas maneiras diferentes, ou seja, existem dois produtos distintos entre dois vetores. A primeira forma de produto será chamada de produto escalar entre dois vetores e a segunda de produto vetorial entre dois vetores.

**DEFINIÇÃO:**

I) O produto escalar entre dois vetores é definido matematicamente na forma:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cdot \cos(\alpha) \quad (9)$$

α é o ângulo entre os dois vetores. O produto escalar entre os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ será:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0$$

Ou seja, o produto escalar entre dois vetores gera um resultado escalar, que é a soma dos produtos dos componentes individuais dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$

II) O produto vetorial entre dois vetores é definido matematicamente na forma:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cdot \sin(\alpha) \mathbf{k} \quad (10)$$

$\mathbf{k}$ indica a direção do vetor resultante. Fisicamente, o produto vetorial resulta em um novo vetor, que apresentará a direção dada pela regra da mão direita. A regra da mão direita é uma lei que funciona muito bem na caracterização do produto vetorial e de alguns vetores originados pelo produto. O produto vetorial, assim como a regra da mão direita, é discutido com mais detalhes na obra de Griffiths (2009), que também explica que o produto vetorial pode ser escrito na forma matricial, uma vez que um vetor pode ser representado por matrizes. Os produtos vetoriais das bases do eixo cartesiano são dados por:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad (11)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad (12)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \quad (13)$$

Como já mencionado e bastante evidenciado anteriormente, o estudo dos vetores é de extrema importância em Física, Engenharias e em todas as Ciências Naturais, incluindo o Eletromagnetismo. Além das operações e propriedades básicas dos vetores, também existem operadores vetoriais que dão todo o sentido das grandezas envolvidas no eletromagnetismo. Esses operadores e suas propriedades serão introduzidos conforme for necessário ao longo deste material e sempre poderão ser encontrados nas referências citadas.

Concluimos que, assim como os números (ou simplesmente escalares), os vetores também satisfazem algumas propriedades bem específicas para a utilização dessa importante ferramenta matemática. Vimos que, diferente dos números, o produto entre os vetores pode ser caracterizado de três maneiras diferentes: produto escalar, vetorial e misto.



ATIVIDADES:

Vetores são objetos matemáticos fundamentais para a Física, pois eles fornecem as informações necessárias para a caracterização das grandezas vetoriais. Considere duas grandezas vetoriais tridimensionais representadas pelos seguintes vetores: $u=(1,2,3)$ e $w=(3,2,1)$.

Considerando essas informações, qual é o produto escalar entre os vetores u e w ?

O produto escalar entre dois vetores gera um resultado escalar, que é a soma dos produtos dos componentes individuais dos vetores u e w , ou seja:

$$u \cdot w = (1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1) = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 10.$$

Campos Elétricos que não Variam no Tempo

Nessa altura da nossa construção do conhecimento, vale destacar que a Teoria Eletromagnética, também conhecida como Eletromagnetismo,

é dividida em duas áreas: a Eletrostática e Eletrodinâmica. Aqui ocaremos apenas na Eletrostática, que é a área limitada ao estudo dos fenômenos elétricos estacionários. O termo estacionário se refere aos fenômenos que não sofrem nenhum tipo de variação com o passar do tempo. Em outras palavras, a Eletrostática é a área do Eletromagnetismo dedicada ao estudo dos fenômenos nos quais não há movimento de cargas elétricas. Esse é o objetivo da presente seção: estudar os conceitos fundamentais da Eletrostática.

Definição de Corpos Puntiformes e Corpos Extensos

Antes de começar o estudo do Eletrostática, vamos apresentar alguns conceitos fundamentais. Conhece-los facilita o entendimento do conteúdo apresentado ao longo deste material.

É importante destacar que, em Física – e, portanto, em todas as Ciências Naturais – um corpo pode ser caracterizado de duas maneiras: puntiforme e extenso.



DEFINIÇÃO:

I) Corpo puntiforme é aquele cujas dimensões e formas não são consideradas importantes no estudo de um determinado problema. Imaginemos um carro viajando em uma estrada, por exemplo: as dimensões do carro são desprezíveis em relação à estrada.

II) Corpo extenso é aquele cujas dimensões e formas são consideradas importantes no estudo de um determinado problema. Como exemplo, imaginemos um carro dentro de uma garagem. Nesse caso, as dimensões do carro não são desprezíveis em relação à garagem.

Em suma, a caracterização dos corpos na descrição dos fenômenos da natureza, em todas as áreas, é muito importante. Dessa forma, precisamos nos atentar a esse detalhe antes de iniciarmos o estudo e a caracterização dos fenômenos de interesse.

A Natureza das Forças

Diante de todas as informações trazidas até o momento, podemos avançar nosso estudo e discutir sobre uma das grandezas mais importantes da natureza: a força.

É importante destacar que em Física, assim como em todas as Ciências Naturais, as inúmeras forças existentes são caracterizadas de acordo com suas naturezas. Em uma linguagem mais técnica, existem dois tipos de forças: as forças de campo e as forças de contato.

I) As forças de campo são aquelas que atuam a longas distâncias. Em outras palavras, essas forças não necessitam de contato entre dois ou mais corpos. Exemplos dessa categoria de forças de campos são a gravitacional, a elétrica e a magnética, sendo que as duas últimas serão estudadas ao longo deste material.

II) As forças de contato são aquelas que, como o próprio nome já diz, atuam necessariamente por meio do contato entre dois ou mais corpos. Exemplos dessa categoria de forças são as forças de atrito, força elástica em uma mola, força normal etc.



VOCÊ SABIA?

Força é uma grandeza física de natureza vetorial conhecida por ser a causadora de qualquer tipo de movimento. Isso quer dizer que, se há movimento, ele foi causado por um tipo de força.

Introdução às Cargas Elétricas

Assim como muitas outras áreas da Física, da Filosofia e das Ciências Naturais, a Eletrostática teve início na Grécia antiga. Nessa época, já era discutido o fenômeno de atração entre diferentes tipos de materiais após entrarem em atrito. Uma espécie de resina vegetal, denominada âmbar, quando atritada apresentava a característica de atrair diferentes tipos de materiais, como palha e algumas pequenas sementes. Dessa forma, foi percebido que o âmbar era um material apropriado para causar esse efeito.

A força causada pelo âmbar foi chamada de atração elétrica (palavra que tem origem do grego elektron, que quer dizer âmbar). Assim se originou a Eletrostática. É importante destacar que hoje, além da eletrização por atrito, existem diferentes maneiras de eletrizar um determinado corpo. Para mais informações sobre o processo de eletrização de um corpo, podem ser consultadas as referências GRIFFITHS (2009) e NUSSENZVEIG (1997).

Inicialmente acreditava-se que essa força poderia ser apenas atrativa. Com o passar do tempo, foi sendo demonstrado que o tipo de força de interação entre dois materiais diferentes poderia ser, também, de atração ou repulsão, o que era causado pelo excesso ou falta de cargas elétricas. Descobriu-se, então, a existência de dois tipos de cargas - as positivas e as negativas - e houve a necessidade de convencionar sinais para elas. Na mesma época foi percebida a existência de dois tipos de materiais que estavam relacionados justamente com a facilidade de ganhar ou perder cargas elétricas. Esses materiais foram caracterizados como condutores e isolantes elétricos.



DEFINIÇÃO:

I) Os condutores são os materiais que apresentam facilidade em ganhar ou perder cargas elétricas. Em outras palavras, as cargas elétricas se movimentam com facilidade dentro desses materiais. Os metais são bons exemplos desse tipo de material.

II) Os isolantes são aqueles materiais que apresentam dificuldade em ganhar ou perder cargas elétricas. Em outras palavras, as cargas elétricas têm dificuldade para se movimentar dentro desses materiais. Nesse caso, podemos citar a borracha como exemplo.



SAIBA MAIS:

Uma abordagem interessante sobre materiais isolantes e condutores pode ser consultada em NUSSENZVEIG (1997).

Uma outra definição muito interessante - e importante - é a de carga elétrica, que nada mais é do que uma propriedade da matéria. As cargas elétricas têm origem no nível atômico e são constituídas de elétrons e prótons que, por sua vez, apresentam cargas de mesmo valor, porém com sinais contrários. Os elétrons e os prótons são partículas subatômicas que apresentam, respectivamente, cargas negativas e positivas. Um corpo é dito neutro se ele apresenta o mesmo número de prótons e elétrons: nesse caso, sua carga total é nula. Assim como o elétron e o próton, o nêutron é uma partícula subatômica de carga nula.

Na natureza, a carga de um determinado objeto eletrizado é sempre dada como múltiplos inteiros da carga do elétron ou do próton. A carga do elétron é representada pela letra e e a do próton $-e$, sendo seus valores, respectivamente:

$$e = -1,6021892 \cdot 10^{-19} C \quad (14)$$

$$-e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} C \quad (15)$$

Como a Física trabalha com grandezas físicas, a carga elétrica é uma grandeza física de origem escalar, então, há a necessidade da definição de uma unidade de medida para carga elétrica.



VOCÊ SABIA?

A unidade de carga elétrica é representada pela letra C (Coulomb) e ganhou esse nome em homenagem ao cientista Charles Augustin de Coulomb. Coulomb foi o primeiro cientista a determinar, de maneira experimental, a lei de atração ou repulsão entre as cargas elétricas. Essa lei foi denominada então como sendo a Lei de Coulomb.

Concluimos que todo tipo de matéria na natureza apresenta uma característica que está ligada com a carga elétrica. A presença da carga elétrica é o que nos permite estudar e quantificar todos os fenômenos da natureza relacionados ao eletromagnetismo. Tudo isso será feito mais adiante e com muita calma.



ACESSE:

Caso julgue necessário, [assista ao seguinte vídeo](#) para a melhor assimilação do conteúdo sobre carga elétrica.



RESUMINDO:

Ao longo deste capítulo, focamos em conceitos fundamentais que formam a base de toda a Teoria Eletromagnética. Afinal, nosso objetivo principal é construir a teoria da eletrônica avançada e, para isso, precisamos entender muito bem como é o funcionamento da Teoria Eletromagnética. Para alcançar esse objetivo, iniciamos nosso estudo com a introdução das grandezas escalares e também das grandezas vetoriais. Vimos que as grandezas vetoriais são representadas por vetores, o que nos permitiu compreender esses objetos magnéticos, suas propriedades e características, além da sua aplicabilidade. Em seguida, entendemos como podemos caracterizar um corpo e discutimos sobre uma das grandezas mais importantes da natureza: a força. Diante de todos esses conhecimentos fundamentais, finalmente apresentamos o conceito de carga elétrica.

Lei de Gauss e suas Aplicações



OBJETIVO:

Ao término deste capítulo, você será capaz de entender como funciona a interação elétrica entre corpos eletricamente carregados. Além disso, você será capaz de descrever campos elétricos por meio das grandezas carga e força elétrica. Para isso, faremos uma discussão sobre forças elétricas entre duas partículas carregadas. Em seguida, passaremos ao estudo de corpos com distribuição contínua de cargas. Com todas as ferramentas e todos os conceitos discutidos e entendidos, passaremos ao estudo de uma das leis mais importantes do Eletromagnetismo e, portanto, da Eletrônica Analógica: a Lei de Gauss. Nesse contexto, exploraremos o caráter geométrico da Teoria Eletromagnética e as simetrias existentes nessa teoria.

A Lei de Coulomb para a Força Elétrica

Como vimos anteriormente, na natureza existem dois tipos de cargas elétricas: as positivas e as negativas. Essas características serão exploradas a seguir, na introdução da denominada Lei de Coulomb. Nesse contexto, trataremos inicialmente dessas cargas como sendo corpos puntiformes e, em seguida, trataremos dos casos de corpos extensos.

Vamos imaginar a situação inicial de duas cargas elétricas puntiformes de sinais iguais. Consideraremos que essas cargas estão dispostas no espaço a uma distância r uma da outra. Essa situação é representada pela Figura 2.

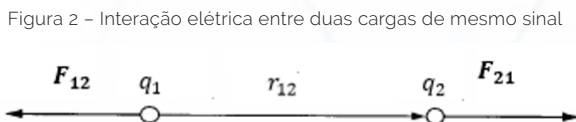


Figura 2 – Interação elétrica entre duas cargas de mesmo sinal

Fonte: Adaptada de Nussenzveig (1997).

**DEFINIÇÃO:**

A Lei de Coulomb é aquela que dá informação sobre a força elétrica existente entre as duas cargas, ou seja, dá informação sobre a força elétrica interagente entre elas. A Lei de Coulomb é dada por:

$$\mathbf{F}_{12} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{(r_{12})^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (16)$$

Nessa equação, k é a denominada constante Eletrostática do meio em que se encontram as cargas, r_{12} é o módulo do vetor deslocamento entre as duas cargas e $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ é o versor que dá a direção do vetor deslocamento entre as duas cargas.

A constante Eletrostática do meio também pode ser reescrita na forma:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad (17)$$

onde ϵ é a denominada permissividade do meio. No vácuo consideramos $\epsilon = \epsilon_0$. Então, a constante Eletrostática do vácuo fica:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98755 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (18)$$

É importante destacar que a força elétrica dada pela Lei de Coulomb é uma força de campo, ou seja, é uma força que atua à distância. Outro fator importante a ser destacado é que as forças $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{21}$ formam pares de forças de ação e reação. Isso quer dizer que elas são forças de mesma natureza, que apresentam mesmo módulo e direção, porém em sentidos opostos. Isso justifica o sinal negativo em (16) e o fato de a soma vetorial ser nula ($\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$).

Se considerarmos um sistema de muitas cargas puntiformes, a força elétrica resultante é dada pela soma vetorial de todas as forças elétricas que atuam sobre cada par de carga. Esse princípio é denominado princípio da superposição. Matematicamente:

$$\mathbf{F}_i = K \cdot q_i \cdot \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{(r_{ji})^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ji}.$$

O princípio da superposição permite-nos transformar nosso sistema de cargas puntiformes em uma distribuição de cargas em um determinado volume (v). Em outras palavras, conseguimos dividir o volume v em partes suficientemente pequenas, chamadas de Δv_i . A soma de todas essas partes resulta no volume total da distribuição de cargas. Cada parte dessa divisão contendo volume Δv_i apresenta cargas Δq_i que poderão ser tratadas como cargas puntiforme. A densidade de carga de cada parte dessa divisão do volume é dada pela razão entre a carga e o volume, assim:

$$\Delta q_j = \rho_j \Delta v_j. \quad (20)$$

Essa relação tende a integrais de volume, após ser passado o limite com Δv_j tendendo a zero, ou seja:

$$\sum_j q_j = \sum_j \rho_j \Delta v_j \rightarrow \int_v dv = \int_v \rho dv. \quad (21)$$

Nessa equação, dv é o elemento de volume e ρ a densidade de carga volumétrica. Essa relação pode ser estendida aos casos de distribuição de cargas sobre uma superfície de área S , como a distribuição de carga em um cabo coaxial cilíndrico. Nesse caso, teremos a seguinte relação:

$$dq = \sigma ds, \quad (22)$$

ds é o elemento de área e σ é a densidade superficial de carga. A relação (21) também pode ser estendida ao caso de uma distribuição linear de carga descrito por uma linha l , como a distribuição de cargas em um fio condutor. Nesse caso:

$$dq = \lambda dl, \quad (23)$$

dl é o elemento de linha e λ é a densidade linear de carga.

Em conclusão, a Lei de Coulomb é a responsável pela interação elétrica entre dois ou mais corpos eletricamente carregados ou um corpo eletricamente carregado e outro neutro. Ela é a responsável pela atração ou repulsão entre os corpos e forma uma base teórica extremamente importante para caracterizar outras grandezas no contexto do Eletromagnetismo. Isso se estende a qualquer tipo de distribuição de cargas na natureza.



SAIBA MAIS:

Exemplos práticos dados pelas equações (21) e (23) são aplicadas em Griffiths (2009), Jackson (1975), Machado (2000) e Nussenzweig (1997) e podem ser consultados para mais detalhes.

Campo Elétrico Devido à Distribuição Contínua de Cargas

O princípio da superposição descrito em (19) nos permite escrever a força elétrica de interação entre cargas puntiformes na forma:

$$\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}_i. \quad (24)$$

Nessa equação,

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{(r_{ji})^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ji}. \quad (25)$$

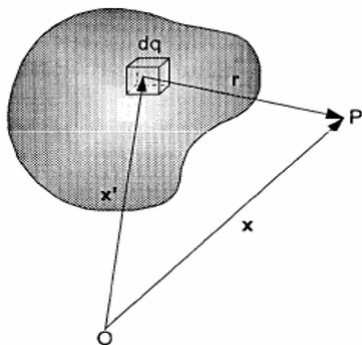
O vetor $\mathbf{E}$ é denominado campo elétrico. Em outras palavras, essas equações querem dizer que as fontes dos campos elétricos são as cargas e é por meio desses campos que são sentidas as forças das cargas.

**IMPORTANTE:**

Destacamos que para estudar o campo elétrico de uma ou mais cargas no espaço é necessária a introdução de uma carga que recebe o nome de carga de prova. Esse campo elétrico é manifestado na carga de prova por meio das forças elétricas sentidas por ela. Uma observação importante é que a própria carga de prova vai gerar um campo elétrico que pode perturbar e atrapalhar o processo de medida de um sistema de cargas ou distribuições de cargas. Para mais detalhes sobre campo elétrico, podem ser consultados em Griffiths (2009), Jackson (1975), Machado (2000) e Nussenzveig (1997).

Assim como em (21), para uma distribuição contínua de cargas, como na Figura 3, a equação (25) se transforma em integrais volumétricas.

Figura 3 – Representação de uma distribuição contínua de cargas



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (1997).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\square} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\square} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dq, \quad (26)$$

Sendo:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (27)$$

$$r \equiv |\mathbf{r}|. \quad (28)$$

O vetor $\mathbf{x}$ é o vetor posição do ponto P em relação à origem. O ponto P é o ponto no qual se deseja calcular o campo elétrico e $\mathbf{x}'$ é o vetor posição do elemento de carga dq , na qual será calculada a contribuição do campo elétrico.

Assim como em (21), para uma distribuição volumétrica de cargas:

$$dq = \rho dv. \quad (29)$$

Para uma distribuição superficial de cargas:

$$dq = \sigma dS. \quad (30)$$

Para uma distribuição linear de cargas:

$$dq = \lambda dl. \quad (31)$$

Nas últimas três equações, ρ , σ e ν são, respectivamente, as densidades de cargas volumétrica, superficial e linear. dv , dS e dl são os elementos de volume, superfície e de linha, respectivamente. Uma forma mais concreta de se identificar campos elétricos é observar as chamadas linhas de campo ou linhas de forças.



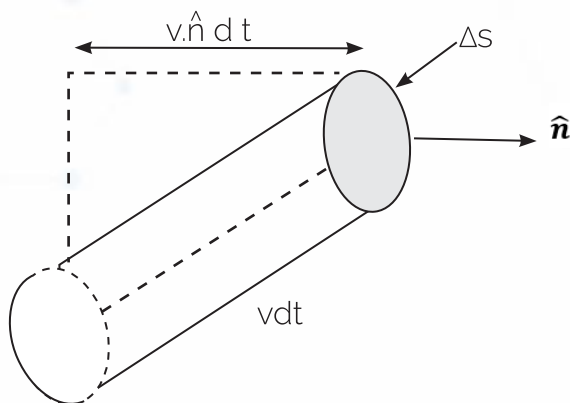
SAIBA MAIS:

Uma abordagem interessante para aprofundamento é feita em NUSSENZVEIG (1997).

O Fluxo Elétrico

O conceito de fluxo é de extrema importância não só na Teoria Eletromagnética, mas também em todas as áreas das Engenharias e da Ciências Naturais. Para introduzir o conceito de fluxo de um campo vetorial, iremos fazer uma analogia com a Hidrodinâmica e a vazão de um fluido por uma superfície qualquer. Essa situação é representada pela Figura 4.

Figura 4 – Representação da vazão de um fluido



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (1997).

Nessa situação, é a velocidade na qual o fluido atravessa a superfície de um objeto. $\Delta \mathbf{S}$ é o vetor normal à superfície (ou vetor superfície), cujo módulo dá a área superficial do objeto. O versor do vetor superfície é dado por $\hat{\mathbf{n}}$. Matematicamente, o vetor superfície é escrito na forma:

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta S \hat{\mathbf{n}}. \quad (32)$$

O fluxo ou vazão de um fluido que atravessa uma superfície é dado pelo produto escalar do vetor velocidade com o vetor superfície:

$$\phi = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} = v \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S. \quad (33)$$

Considerando que o fluido é incompressível e a superfície considerada é fechada, essa equação se transforma em uma integral fechada por toda a superfície. Ou seja:

$$\phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (34)$$

A integral fechada quer dizer que o volume de fluido que entra na superfície é o mesmo que sai.



DEFINIÇÃO:

No caso de cargas fluindo por uma dada superfície, o vetor velocidade da equação supracitada é substituído pelo campo elétrico, ou seja:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (35)$$

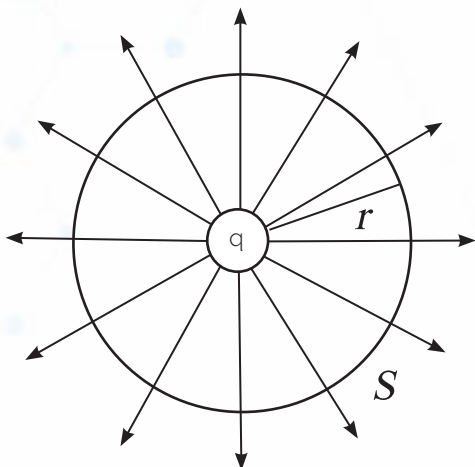
Esse é o denominado fluxo de campo elétrico. O fluxo de campo elétrico será muito utilizado a partir daqui, ao longo de todo o material.

A conclusão mais importante é a de que o fluxo de um campo vetorial, ou seja, um campo de uma grandeza vetorial, está relacionado com a geometria do sistema por meio da integral de superfície fechada. Isso será melhor explorado nas seções seguintes.

A Lei de Gauss para a Eletrostática

Vamos imaginar uma carga pontual envolvida por uma superfície esférica de raio r . A Figura 5 reproduz essa situação.

Figura 5 – Vetor campo elétrico saindo de uma carga



Fonte: Adaptada de Machado (2000).

O campo elétrico de uma carga pontual apresenta simetria esférica radial. Matematicamente, devido à alta simetria, isso quer dizer que o campo elétrico será uma função apenas do raio r da superfície esférica.

Cada ponto da superfície esférica apresentará um campo elétrico com módulo constante. Esse campo está na mesma direção e sentido do vetor superfície que, como já mencionado, é sempre perpendicular à ela. Dessa forma, segundo (35), o fluxo do campo elétrico gerado pela carga pontual é dado por:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}(r) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S E(r) \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

O produto escalar $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$, logo:

$$\phi = \oint_S E(r) \cdot dS = E(r) \cdot \oint_S dS = E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2.$$

Lembre-se que $4\pi \cdot r^2$ é o módulo da área da superfície esférica dS . De acordo com o campo elétrico de uma carga puntiforme:

$$\phi = E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



IMPORTANTE:

O resultado obtido nesse exemplo é muito importante, pois indica que o fluxo do campo elétrico independe do raio da superfície esférica. Além disso, o fluxo do campo elétrico depende apenas da carga q no interior da superfície esférica. Esse fato está ligado de maneira direta ao fato de que o fluxo do campo elétrico está associado ao número de linhas de campo que atravessam a superfície esférica. Mais especificamente, a forma da superfície não importa. O cálculo do fluxo do campo elétrico em outros tipos de superfície pode ser um pouco mais complicado, mas, apesar disso, o resultado sempre será dado da mesma maneira. O fluxo elétrico em uma superfície fechada, será sempre da forma:

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (36)$$

Esse resultado também se estende a um sistema de várias cargas pontuais dentro de uma superfície. Nesse caso, a carga q será a carga total (soma algébrica de todas as cargas dentro da superfície). Destacamos o fato de que essas cargas não precisam estar localizadas no centro da superfície e sim em qualquer lugar dentro dela. Juntando todas essas informações, temos a origem da denominada Lei de Gauss da Eletrostática:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}(r) \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (37)$$

Esta é a forma integral da Lei de Gauss que, em resumo, relaciona a carga elétrica dentro de uma superfície fechada com o fluxo de campo elétrico que atravessa uma dada superfície de área dS , gerada por essa carga.

Para o caso de distribuições contínuas de cargas ao invés de cargas pontuais, a Lei de Gauss fica reescrita na forma:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv, \quad (38)$$

sendo v o volume delimitado pela superfície S e ρ a densidade de carga da distribuição.

A Lei de Gauss também pode ser expressa em sua forma diferencial. Para isso utilizaremos o Teorema do Divergente.



DEFINIÇÃO:

Divergente é a operação que transforma um vetor qualquer em um escalar. Esse processo é dado por meio do produto escalar entre o operador diferencial ∇ e o vetor. Esse operador será muito utilizado ao longo deste material.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (39)$$

∇ é o operador nabla.

Uma boa referência para aprofundamento desse teorema é GRIFFITHS (2009).

O Teorema do Divergente transforma uma integral de superfície fechada em uma integral volumétrica:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv.$$

Seguindo (38),

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv = 0.$$

Uma vez que o volume sobre qual é feita a integração não é importante.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0. \quad (40)$$

Essa é a conhecida Lei de Gauss na forma diferencial.



ACESSE:

Caso julgue necessário, [assista ao vídeo](#) indicado para uma melhor assimilação de conteúdo.



SAIBA MAIS:

A Lei de Gauss é de extrema importância para o Eletromagnetismo. Para mais detalhes e aprofundamento sobre tal lei, consulte Griffiths (2009), Jackson (1975), Machado (2000) e Nussenzveig (1997).



RESUMINDO:

Ao longo deste capítulo, focamos nosso estudo em uma das leis mais importante do eletromagnetismo: a Lei de Gauss. Inicialmente, introduzimos e discutimos com bastante cuidado a Lei de Coulomb para a Eletrostática. Vimos que essa é a lei responsável por descrever a interação elétrica entre corpos eletricamente carregados. Em seguida, avançamos nosso estudo para casos de distribuição contínua de cargas e também estudamos como essas forças de interação podem ser tratadas nesse contexto. Feito isso, o passo seguinte foi introduzir a lei dos fluxos de campos vetoriais. Fizemos isso, em um primeiro momento, com base em um fluido escoando e depois com base nos campos elétricos. Por fim, utilizamos a lei dos fluxos para enunciar a Lei de Gauss para a Eletrostática.

Potencial Elétrico Campo Elétrico



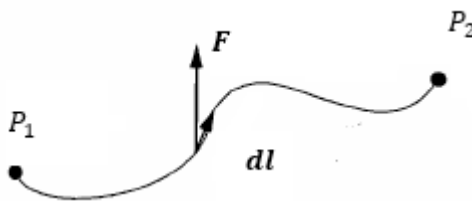
OBJETIVO:

Ao término deste capítulo, você será capaz de entender como associar potencial elétrico às outras grandezas já introduzidas, como as cargas, as forças elétricas e os campos elétricos. Para isso, faremos uma discussão sobre o trabalho realizado por uma força, no contexto da mecânica e das forças centrais, para, em seguida, adaptar esse estudo ao caso do potencial elétrico. Com todas as ferramentas e todos os conceitos discutidos e bem entendidos, passaremos ao estudo de equações diferenciais parciais, que também pode ser uma maneira de determinar o potencial elétrico.

O Potencial

Vamos imaginar um caminho qualquer entre dois pontos, P_1 e P_2 , que pode ser representado por γ . A orientação desse caminho é dada de P_1 para P_2 conforme a Figura 6:

Figura 6 – Caminho entre os pontos P_1 e P_2



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (1997).

O trabalho realizado por uma força F ao longo de todo esse caminho é dado na forma:

$$W_{P_A \rightarrow P_B} = \int_{P_A}^{P_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (41)$$

sendo $d\mathbf{l}$ o elemento de linha orientado de acordo com o caminho C.

Se a força $\mathbf{F}$ é uma força do tipo central, isso quer dizer que ela apresenta dependência apenas radial, ou seja, $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$. Nesse caso, $\hat{\mathbf{r}}$ é o versor da direção radial com origem no centro da força:

$$W_{P_A \rightarrow P_B} = \int_{P_A}^{P_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_A}^{P_B} F(r)\hat{\mathbf{r}} d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr.$$



IMPORTANTE:

Esse resultado implica que a integral de caminho não depende do próprio caminho e sim dos pontos inicial e final. Ou seja

$$\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -[U(r_2) - U(r_1)]. \quad (42)$$

Essa equação é uma função do tipo:

$$U(r) \equiv - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (43)$$

O ponto $\mathbf{r}_0$ é o ponto que deve ser arbitrariamente escolhido, no qual a função se anula ($U = 0$).

A função U é denominada energia potencial, que é definida por uma constante arbitrária. Essa constante arbitrária está ligada à escolha de $\mathbf{r}_0$ na qual a função U se anula.

É importante destacar que a força é dita conservativa quando o trabalho de uma força depende apenas dos pontos inicial e final e não do caminho C.

De forma mais objetiva, a independência do caminho C pode ser verificada considerando o caminho inverso, ou seja, dos pontos P_B para

P_A . O caminho inverso inverte os limites de integração, o que gera um sinal negativo na integral. No fim, a integral no caminho fechado (P_A até P_B e depois de P_B até P_A) será nulo. Ou seja, o caminho não influenciará. Matematicamente:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

De maneira geral, para um deslocamento infinitesimal em que $d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$, a diferença $[U(r_2) - U(r_1)]$, a diferença pode ser escrita como uma diferencial.



IMPORTANTE:

Essa afirmação quer dizer que:

$$[U(r_2) - U(r_1)] = dU = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Então (42) é reescrito na forma:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (44)$$

Na equação mostrada anteriormente, ∇U é o gradiente da função U . O gradiente de uma função transforma uma função escalar em um vetor e esse vetor é sempre perpendicular à superfície. Novamente, esse processo é realizado por meio do operador ∇ . Podemos concluir que a força $\mathbf{F}$ é perpendicular à superfície.

Uma superfície na qual U é constante é denominada superfície equipotencial, ou seja, superfície que apresenta o mesmo potencial em todos os seus pontos. Dessa forma, a força $\mathbf{F}$ é perpendicular à superfície equipotencial.

No caso de uma carga puntiforme na origem, cujo campo elétrico é dado por (25), a equação (42) é reescrita em termos do campo elétrico e do potencial elétrico (U), ou seja:

$$\int_{P_A}^{P_B} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -[U(P_B) - U(P_A)] \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla U. \quad (45)$$

$$[U(P_B) - U(P_A)] = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]. \quad (46)$$

Essa equação define a diferença de potencial entre os pontos P_A e P_B .



DEFINIÇÃO:

O potencial elétrico pode ser entendido como sendo o trabalho realizado contra a força exercida pelo campo elétrico para movimentar uma carga de um ponto até . A unidade de pontencial elétrico é dado como sendo o (V).

Como já mencionado, a escolha na qual a função U se anula é arbitrária. Em uma região do espaço finito, podemos convencionar $U(\infty) = 0$. Assim, (45) fica:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (47)$$

É importante mencionar que essa convenção não se aplica caso a distribuição de carga se estenda até o infinito.

No caso em que consideramos uma distribuição contínua de cargas, a equação (47) pode ser reescrita na forma:

$$U(P) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}. \quad (48)$$

Nesse caso, r é a distância do ponto P até a distribuição de carga dq . Isso reproduz uma distribuição volumétrica de cargas:

$$dq = \rho dv. \quad (49)$$

Para uma distribuição superficial de cargas:

$$dq = \sigma dS. \quad (50)$$

Para uma distribuição linear de cargas:

$$dq = \lambda dl. \quad (51)$$

Nas últimas três equações, ρ , σ e ν são as densidades de cargas volumétrica, superficial e linear, respectivamente. dv , dS , e dl são os elementos de volume, superfície e de linha, respectivamente.

Uma conclusão à qual podemos chegar agora e que é extremamente importante é a de que há relação entre todas as grandezas estudadas até o presente momento. Ou seja, por meio da carga elétrica definimos a força elétrica, por meio dessas duas definimos o campo elétrico e, por último, definimos o potencial elétrico.



SAIBA MAIS:

Exemplos de cálculos de potenciais para distribuições de cargas são encontrados em Griffiths (2009), Jackson (1975), Machado (2000) e Nussenzveig (1997).

As Equações Diferenciais para o Potencial

A Equação de Poisson

Outra maneira de determinar o potencial elétrico, em algumas situações, é utilizar as equações diferenciais, denominadas Equação de Poisson e equação de Laplace. Essas são equações diferenciais parciais de segunda ordem e serão os assuntos tratados neste tópico.

Como mencionado anteriormente, a Equação de Poisson é uma equação diferencial parcial que pode ser obtida pela combinação das equações da Eletrostática. É importante destacar que iremos considerar

a Eletrostática no vácuo e escrever a Equação de Poisson. As equações para a Eletrostática em meios materiais são obtidas de maneira análoga.

Vamos iniciar considerando a Lei de Gauss no vácuo, na forma diferencial, dada por (40). Vamos considerar também a equação que relaciona o campo elétrico com o potencial elétrico, dada pela equação (45). Substituindo (45) em (40) obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\nabla U) - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Não podemos deixar de observar que essa equação é um divergente de um gradiente. Essa é uma identidade vetorial que resulta em:

$$\nabla^2 U = - \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (52)$$

Essa é, finalmente, a famosa Equação de Poisson.

O operador diferencial ∇U é denominado gradiente de uma função escalar U . O gradiente transforma uma função escalar em uma função vetorial. Em coordenadas cartesianas, o gradiente de uma função escalar é dado por:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (53)$$

O operador diferencial $\nabla^2 U$ é denominado laplaciano de uma função escalar. Em coordenadas cartesianas, o laplaciano de uma função escalar é dado por:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (54)$$

**SAIBA MAIS:**

Boas referências para aprofundamento desses operadores em outros sistemas referenciais, como por exemplo, coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas, são: Griffiths (2009), Jackson (1975), Machado (2000), Nussenzweig (1997).

Devemos destacar que, por ser uma equação diferencial parcial, precisamos, para resolvê-la, das condições de contorno, também denominadas condições de fronteira. As condições de fronteira são determinadas de acordo com cada tipo de problema.

A Equação de Poisson, dada por (52), relaciona o potencial elétrico gerado por uma distribuição de cargas com a própria distribuição de cargas. Uma observação importante a ser mencionada é que a densidade de cargas em uma determinada região de interesse pode ser nula. Nesses casos, as condições de contorno são obtidas fixando os valores dos potenciais nas superfícies de alguns condutores, o que quer dizer que não teremos informações sobre as distribuições de cargas.

Equação de Laplace

Devemos tomar muito cuidado porque os potenciais são gerados por cargas que estão fora da região na qual estamos interessados dentro dos problemas eletrostáticos. Os casos nos quais a densidade de carga é nula geram a denominada equação de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (55)$$

Essa é a famosa Equação Diferencial de Laplace, que nada mais é do que um caso especial da Equação de Poisson.

Soluções das Equações de Poisson e Laplace

Mencionamos anteriormente que as equações de Poisson e de Laplace são equações diferenciais parciais e que, por esse fato, normalmente necessitam de condições auxiliares para ser resolvidas.

Essas informações adicionais são as denominadas condições de contorno. Por meio desse conjunto de informações (equação diferencial parcial e condições de contorno), obtemos soluções para as equações de Poisson e de Laplace.

Nesse contexto, uma pergunta muito interessante a ser feita é: será que as soluções das equações de Poisson e de Laplace são únicas? Para responder essa pergunta, estudaremos com mais detalhes essas equações – dando destaque para a equação de Laplace, por ser menos complexa.

Começemos com a possibilidade de sobrepor duas ou mais soluções da equação de Laplace (55). Essa sobreposição formará a solução geral da equação. As sobreposições das soluções serão introduzidas na forma:

$$U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + \dots \quad (56)$$

a_i são os coeficientes e são as soluções linearmente independentes da equação de Laplace. A prova para essa afirmação é feita da seguinte forma:

$$\nabla^2 U = \nabla^2 (a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + \dots) = 0$$

$$\nabla^2 U = a_1 \nabla^2 U_1 + a_2 \nabla^2 U_2 + a_3 \nabla^2 U_3 + \dots = 0,$$

U_j são soluções da equação de Laplace, logo:

$$\nabla^2 U_1 = 0,$$

$$\nabla^2 U_2 = 0,$$

$$\nabla^2 U_3 = 0.$$

Então:

$$\nabla^2 U = a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 + \dots$$

$$\nabla^2 U = 0.$$

As constantes a_i precisam ser escolhidas de forma que reproduzam as condições de contorno.

O que acabamos de mostrar é que soluções linearmente independentes da equação de Laplace, quando somadas, produzem uma solução geral. Não podemos esquecer das constantes a_i , que tornam essas soluções linearmente independentes.

Dadas essas informações, entramos em uma outra discussão. Imagine que temos um problema qualquer com condições de contorno fixas. Será que a determinação dos coeficientes a_i é única? Para responder essa pergunta, consideremos duas soluções gerais da equação de Laplace (55) dadas por U_1 e U_2 . Como já mencionado, essas soluções podem ser escritas na forma:

$$U_1 = \sum_{j=1}^i a_j U_j,$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^i b_j U_j.$$

Se essas soluções gerais satisfazem as mesmas condições de contorno dentro de uma mesma região contendo um volume v delimitado por uma superfície S , isso quer dizer que U_1 e U_2 vão diferir no máximo por uma constante adicionada.



SAIBA MAIS:

Esse é um teorema que pode ser consultado para mais detalhes em Nussenzveig (1997).

Com essas informações, vamos introduzir os três tipos de condições de contorno presentes na Eletrostática:

I) As condições de Dirichlet são aquelas que especificam apenas o potencial elétrico U sobre algumas superfícies.

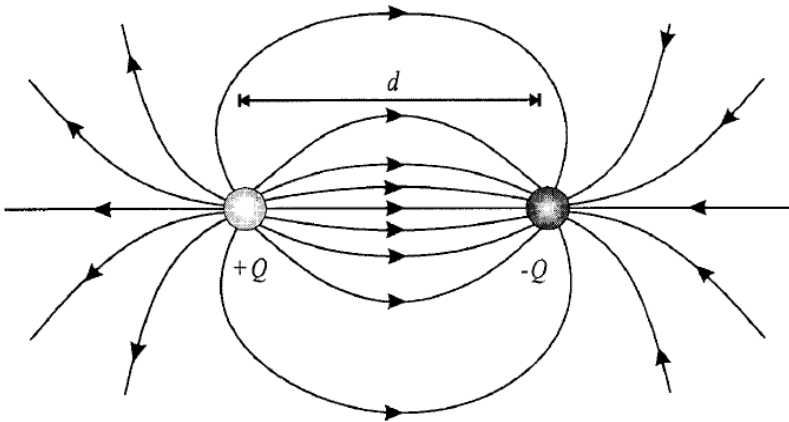
II) Condição de Neumann são aquelas que definem a componente normal a superfície do campo elétrico, e não o potencial elétrico U .

III) Condições de Cauchy são aquelas dadas em termos do potencial U em algumas superfícies e $\partial U / \partial n$ em outras, sendo na direção do vetor superfície.

O Dipolo Elétrico e as Linhas de Fluxo

Existe na natureza uma distribuição de cargas muito importante e muito utilizada no contexto do Eletromagnetismo para modelagem de alguns sistemas físicos. Essa distribuição é formada por duas cargas, sendo elas uma positiva e uma negativa, de mesmo módulo, separadas por uma dada distância, e é denominada dipolo elétrico. O dipolo elétrico é representado pela Figura 7.

Figura 7 – Campo elétrico em um sistema de dipolo elétrico



Fonte: Adaptada de Machado (2000).

Ressaltamos que na natureza existem dois tipos de dipolos, sendo eles os dipolos elétricos permanentes e os dipolos elétricos induzidos - esses últimos serão introduzidos mais adiante. Os dipolos elétricos permanentes aparecem na natureza em moléculas apolares e sua formação é muito comum em moléculas nas quais a disposição dos átomos constituintes é assimétrica. Como exemplo podemos citar a

molécula de água, que é constituída de dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio.

Nos dipolos elétricos as configurações das linhas de campo elétrico são representadas pela Figura 7. É extremamente importante notar uma maior densidade de linhas de campos na região central entre as cargas: quanto maior a densidade dessas linhas, maior é a intensidade do campo elétrico nessa região.

O cálculo do campo elétrico de um dipolo é baseado na Figura 7 e consiste na soma vetorial entre os campos gerados pela carga positiva e negativa. Esse cálculo, apesar de parecer simples, exige algumas aproximações mais específicas e por isso não serão demonstrados aqui. Essa aproximação é chamada de expansão multipolar.



SAIBA MAIS:

Para mais detalhes sobre essa dedução, consulte Griffiths (2009) e Jackson (1975).

O campo elétrico de um dipolo elétrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}, \quad (57)$$

sendo $\mathbf{p}$ o denominado vetor dipolo elétrico, cuja obtenção é feita em GRIFFITHS (2009).



RESUMINDO:

O presente capítulo apresentou como ferramenta de estudo o potencial elétrico. Nesse contexto, utilizamos os conceitos já definidos de força elétrica e também de campo elétrico para entender como funciona essa grandeza escalar de fundamental importância no contexto do Eletromagnetismo. Trabalhamos com algumas equações, como a equação de Gauss e a adaptação de tal equação para o caso da Eletrostática, e conseguimos encontrar equações bem específicas para a determinação do potencial elétrico. Em seguida, também discutimos uma outra maneira de obter essa grandeza, por meio de equações diferenciais parciais. Damos o nome de Equação de Poisson e equação de Laplace para essas equações gerais que, quando bem trabalhadas, fornecem todas as informações possíveis retiradas do potencial elétrico.

Energia e os Campos Eletrostáticos



OBJETIVO:

Ao término deste capítulo, você será capaz de entender como os campos elétricos carregam energia elétrica em si. Para isso, faremos uma discussão sobre o trabalho realizado pela força elétrica e, em seguida, utilizando os conhecimentos já discutidos, iremos trabalhar com as equações obtidas até o presente momento - incluindo a Lei de Gauss - para verificar que a densidade de energia elétrica carregada por campos elétricos é proporcional ao próprio campo elétrico.

Trabalho de uma Força Elétrica

Inicialmente, vamos calcular o trabalho realizado para juntarmos um conjunto de várias cargas puntiformes. Começamos com uma carga : nesse caso não precisaremos de nenhuma energia, visto que essa carga não enfrenta nenhum outro campo elétrico gerado por outra carga. Vamos agora juntar q_1 a uma carga q_2 . Nesse caso será realizado o seguinte trabalho:

$$W_2 = q_2 V_1(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right), \quad (58)$$

sendo V_1 o potencial elétrico devido a q_1 , e r_2 o lugar no espaço onde está sendo colocada a carga q_2 . Realizando esse processo várias vezes e contando propositalmente duas vezes cada par de cargas, encontramos:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i). \quad (59)$$

Repare que essa equação está dividida pela metade, pois cada par de cargas foi contado duas vezes. Esse é o trabalho realizado para agrupar

todas as cargas pontuais e também a energia que seria recuperada se o sistema se desmanchasse. Essa energia é a denominada energia potencial elétrica.

No caso de distribuições contínuas de cargas, a equação se transforma em:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv, \quad (60)$$

sendo ρ a densidade volumétrica de cargas dadas pela equação na forma diferencial:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) V dv.$$

Fazendo integrações por partes, descartando os termos de superfície e considerando a equação (45), o trabalho é dado como:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_v E^2 dv \right). \quad (61)$$



SAIBA MAIS:

Esse cálculo é realizado e discutido em Griffiths (2009) de maneira simples.

Energia

Vimos ao longo dos capítulos anteriores que a energia potencial elétrica total de uma distribuição contínua de cargas é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') dv. \quad (62)$$

Nesse caso, vimos que V é o potencial gerado pela densidade de cargas ρ . É importante destacar que essa expressão permanece válida em todos os casos, inclusive quando trabalhamos com meios dielétricos.

Vamos lembrar a Lei de Gauss na forma diferencial, dada por (40), e introduzi-la em (62). Assim, ficamos com:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv. \quad (63)$$

Vamos considerar a seguinte identidade vetorial para um vetor $\mathbf{A}$ qualquer:

$$\nabla \cdot (\Phi \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (64)$$

Adaptando essa identidade para o caso em que $\Phi = V$ e $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, encontramos:

$$\nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) = (\nabla \cdot V) \cdot \mathbf{E} + V \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (65)$$

Podemos melhorar essa expressão, reescrevendo-a na forma:

$$V \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot V) \cdot \mathbf{E}. \quad (66)$$

Agora utilizamos o fato de que $\mathbf{E} = -\nabla \cdot V$ e obtemos:

$$V \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (67)$$

Finalmente, a energia total é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v [\nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] dv \quad (68)$$

ou por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) dv + \frac{1}{2} \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv. \quad (69)$$

Por meio do Teorema do Divergente, reescrevemos a primeira integral na forma:

$$\int_v \nabla \cdot (V \cdot \mathbf{E}) dv = \oint_S (V \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (70)$$

É importante destacar que essa integral é nula, já que a superfície tratada é, formalmente, infinita, afinal, o volume corresponde a todo o espaço. Além disso, qualquer distribuição de cargas pode ser expressa em termos da expansão multipolar.



SAIBA MAIS:

Para saber mais detalhes sobre essa afirmação, consulte Machado (2000).

Ainda nesse contexto, vamos considerar que na densidade de carga existe uma carga livre com potencial proporcional a r^{-1} . O campo elétrico é proporcional a r^2 e, portanto, o produto do potencial pelo campo resulta em um fator r^3 . Ao combinar todos os fatores dentro da integral, teremos uma função que se comporta com o fator r e o fator r^{-1} . Isso quer dizer que quando $r \rightarrow \infty$, a função se anula, assim como comentamos anteriormente.

É importante destacar que isso vale para qualquer multipolo e não apenas para uma carga pontual, afinal, o campo e o potencial gerados por distribuições de cargas se anulam mais rapidamente do que os da carga pontual.

EXEMPLO:

Como exemplo, vamos considerar o potencial de um dipolo, que é proporcional a r^{-2} . Seu campo é proporcional a r^{-3} . Ao combinarmos essas duas informações com a área de esfera (que é proporcional a r^2), teremos uma função que depende de r^{-3} . Essa função decai a zero muito mais rápido do que no caso da carga pontual. Dessa forma, na energia total eletrostática teremos apenas o termo:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv. \quad (71)$$

Definimos uma densidade volumétrica de energia na forma:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (72)$$

A partir dessa definição, obtemos a energia Eletrostática.

$$U = \int_v u dv. \quad (73)$$

As equações (72) e (73) são equações gerais para sistemas elétricos. Dessa forma, a densidade de energia Eletrostática pode ser escrita assim:

$$u = \frac{1}{2} E^2. \quad (74)$$

Concluimos, então, que nas regiões onde o campo é mais intenso a energia armazenada é maior.

Vamos agora considerar uma esfera de raio R e permissividade ϵ_0 . A referida esfera apresenta uma densidade volumétrica de cargas homogêneas igual a ρ_0 . Diante dessas informações, vamos calcular a energia Eletrostática desse sistema.

Esse é um exemplo no qual a energia Eletrostática pode ser calculada de duas maneiras, sendo a primeira envolvendo a equação (72). Nesse caso, a energia é expressa em termos da função dos campos elétricos e, por isso, precisamos calcular o campo elétrico. Devido à presença de alta simetria, podemos utilizar a Lei de Gauss (na forma integral) para determinar o campo elétrico. Temos, então:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (75)$$

Devido à presença de alta simetria, concluimos que o campo elétrico apresenta simetria radial, ou seja, deve ser uma função dependente

apenas do raio. Em termos vetoriais, podemos escrever esse campo elétrico na forma:

$$\mathbf{E} = E(r) \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

$\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário que indica a direção radial da simetria esférica.

O sinal do campo elétrico irá depender do sinal da carga. Isso quer dizer que cargas positivas terão um campo elétrico de afastamento e cargas negativas terão campo elétrico de aproximação.

Frente a todas essas informações, precisamos considerar como superfície gaussiana uma esfera de raio r situada dentro da esfera com raio R . Assim, conseguimos calcular o módulo do campo elétrico:

$$\oint_S \pm E \cdot \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv$$

$$\pm E \oint_S dS = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_v dv$$

$$\pm E 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\epsilon_0}$$

Com o módulo, obtemos o vetor campo elétrico.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}. \quad (76)$$

Agora basta determinar o valor da parcela de energia no volume da esfera, que é dado por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{9\epsilon_0^2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$U = \frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0^2} [\varphi]_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi r^4 \sin\theta dr d\theta$$

$$U = -\frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0^2} 2\pi [\cos\theta]_0^\pi \int_0^R r^4 dr$$

$$U = -\frac{\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0^2} (-2) \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$U = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{9\epsilon_0^2 \cdot 5}$$

$$U = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\epsilon_0^2} \quad (77)$$

Não podemos esquecer de tratar também o caso no qual temos a superfície gaussiana fora da esfera de raio R. Esse caso representa fisicamente o campo elétrico externo da distribuição esférica, mas não podemos esquecer que só existem cargas no interior da esfera de raio R. Dessa forma, o módulo do campo elétrico é dado por:

$$\oint_S \pm E \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

$$\pm E \oint_S dS = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_V dv$$

$$\pm E 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3\epsilon_0}$$

$$E = \pm \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2}.$$

O vetor campo elétrico, então, é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (78)$$

Finalmente, a densidade de energia elétrica fora da esfera fica:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{R^6 \rho_0^2}{9\epsilon_0^2} \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{R^6 \rho_0^2}{9\epsilon_0^2} [\varphi]_0^{2\pi} \int_R^\infty \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \sin\theta dr d\theta$$

$$U = -\frac{1}{2} \frac{R^6 \rho_0^2}{9\epsilon_0^2} 2\pi [\cos\theta]_0^\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$U = \frac{\pi R^6 \rho_0^2}{9\epsilon_0^2} (-2) \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty$$

$$U = \frac{2\pi R^6 \rho_0^2}{9\epsilon_0^2} \frac{1}{R}$$

$$U = \frac{2\pi \rho_0^2 R^5}{9\epsilon_0^2}. \quad (79)$$

A energia Eletrostática total será a soma das energias internas e externas, ou seja:

$$U_{total} = U_{interno} + U_{externo}$$

$$U_{total} = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\varepsilon_0^2} + \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\varepsilon_0^2}$$

$$U_{total} = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{9} \left[\frac{1}{5\varepsilon_0^2} + \frac{1}{\varepsilon_0^2} \right]$$

$$U_{total} = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\varepsilon_0^2} [\varepsilon_0 + 5\varepsilon_0]$$

$$U_{total} = \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\varepsilon_0}. \quad (80)$$

Agora iremos discutir a segunda maneira de calcular a energia Eletrostática para o mesmo sistema que acabamos de calcular. Nesse caso, iremos utilizar diretamente a equação (73):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') dv. \quad (81)$$

Como só existem cargas no interior da esfera, a integral é reduzida a uma única integral de volume. Para isso, precisamos das informações sobre o potencial no interior da esfera. Tal potencial é encontrado por meio do campo elétrico:

$$\mathbf{E} = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}. \quad (82)$$

E da relação:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_{ef}) - \int_{\mathbf{r}_{ef}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Nesse caso, precisamos de uma referência, que deve ser o potencial na superfície da esfera. Utilizamos essa referência porque, neste ponto, o potencial fora da esfera precisa coincidir com o potencial dentro da esfera. Fora da esfera, o potencial usa como referência o valor no infinito, uma vez que $V_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Dessa forma, com o auxílio das coordenadas esféricas:

$$V(\mathbf{r}) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot (d\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}),$$

ou:

$$V(\mathbf{r}) = - \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr,$$

$$V(\mathbf{r}) = - \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r}. \quad (83)$$

Para o caso em que $r=R$, o potencial fora da esfera assume o valor:

$$V(R) = - \frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0}. \quad (84)$$

Conseguimos, então, calcular o potencial dentro da esfera ao utilizar o raio da esfera como referência. Isso quer dizer que:

$$V(\mathbf{r}) = V(R) - \int_{\infty}^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot (d\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}),$$

ou:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0}. \quad (85)$$

Para o caso em que $r=R$:

$$V(R) = \frac{R^2 \rho_0}{3} \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon_0}{2\varepsilon_0^2} + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}$$

$$V(R) = \frac{R^2 \rho_0}{3\varepsilon_0}. \quad (86)$$

Repare que isso vai de acordo com o valor obtido fora da esfera. Finalmente, a energia é calculada na forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 \left[\frac{R^2 \rho_0}{3} \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon_0}{2\varepsilon_0^2} + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} \right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$U = \frac{4\pi \rho_0^2 R^5}{15\varepsilon_0}. \quad (87)$$

Também é importante destacar que a equação obtida é a mesma que obtemos ao calcular a energia pelo primeiro método.



RESUMINDO:

No presente capítulo focamos nosso estudo na determinação da densidade de energia elétrica carregada pelos campos elétricos. Nesse contexto, fizemos uma breve discussão sobre o trabalho da força elétrica e, em seguida, determinamos uma maneira de calcular a densidade de energia elétrica que é carregada pelos campos elétricos, uma vez que esses são ondas eletromagnéticas. Dessa forma, e para essa obtenção, aplicamos todos os conceitos estudados até então, para que pudéssemos encontrar uma equação consistente. Em outras palavras, calculamos o campo elétrico (por meio da Lei de Gauss), o potencial e a densidade de carga. Trabalhamos com todas essas equações e chegamos à conclusão de que a densidade de energia elétrica, para o caso do vácuo, depende única e exclusivamente dos campos elétricos.

REFERÊNCIAS

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.

MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. Ponta Grossa: UEPG, 2000.

NUSSENZVEIG, M. H. **Curso de Física Básica**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

